MAAK ELKE OPGAVE OP EEN APART VEL, voorzien van je **naam.**
Op vel 1: **studentnummer, naam, adres, postkode, woonplaats** en **studierichting.**
De onderdelen van de opgaven zijn veelal ONAFHANKELIJK van elkaar op te lossen. Ook al kun je een bepaald onderdeel niet oplossen, PROBEER DAN TOCH HET VERVOLG van de opgave.

Opgave 1 Een krachtveld

Gegeven is een krachtveld: $Axy^3\,\hat{x} + Bx^2$

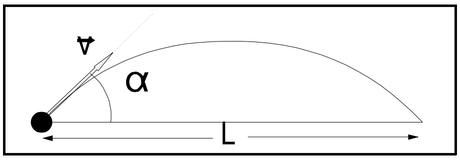
a. Bereken het verband tussen A en B onder de voorwaarde dat het gegeven krachtveld conservatief is.

b. Bereken de potentiaal $U(x, y)$ voor dit krachtveld als tevens gegeven is dat $U(0, 0) = 1$.

c. We gaan weer uit van de algemene vorm van het krachtveld (dwz A en B willekeurig).
Druk het krachtveld uit in poolcoördinaten.

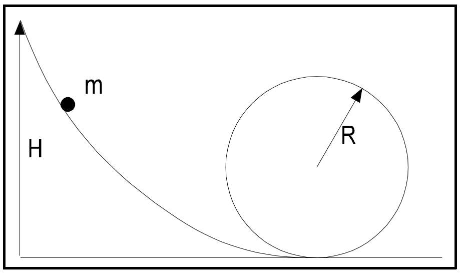
d. Bereken het verband tussen A en B als gegeven is dat het krachtveld tangentieel gericht is.

Opgave 2 De achtbaan



Figuur 1.

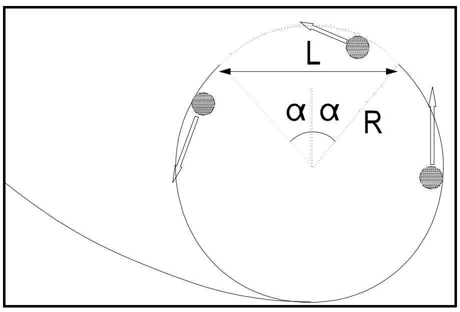
a. Een kogel wordt vanaf de grond onder een hoek α met het horizontale vlak afgeschoten met een beginsnelheid v (zie figuur 1). Horizontaal legt de kogel een afstand L af alvorens de grond weer te raken. Er is geen wrijving.
Bereken de afstand L als functie van de hoek α en v.



Figuur 2.

b. Een kogel met massa m wordt nu vanaf een hoogte H op een rail losgelaten (zie figuur 2). De rail gaat over in een vertikale cirkelvormige baan met straal R. Er is geen wrijving.
Bereken de minimale hoogte H uitgedrukt in de straal R waarbij de kogel de cirkelbaan nog kan doorlopen.

c. Nu wordt er van de bovenkant van de baan een segment met een hoek 2α weggehaald (zie figuur 3). De breedte van het gat is dan $L = 2R\sin(\alpha)$. Bij elke hoek 2α hoort een snelheid V waarmee de kogel de rail verlaat zodat deze, na eerst een kogelbaan doorlopen te hebben, z'n weg weer vervolgt langs de rail.
Laat zien dat voor de snelheid V geldt: $= \sqrt{\dfrac{gR}{\cos(}}$

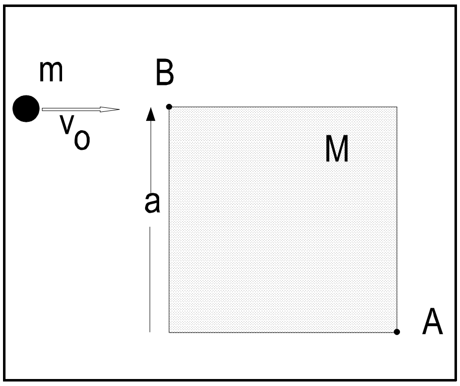


Figuur 3.

d. Bij elke hoek α hoort ook een verhouding $\frac{H}{R}$ waarvoor geldt dat de kogel, na eerst een kogelbaan doorlopen te hebben, z'n weg weer vervolgt langs de rest van de rail. <u>Bereken</u> de verhouding $\frac{H}{R}$ als functie van α en laat zien dat deze minimaal is als $\alpha = \frac{1}{4}$.

Opgave 3 **Het kantelende vlak**

Een vierkante, homogene plaat met massa M en zijde a staat vertikaal opgesteld en kan in het vertikale vlak draaien om het punt A (zie figuur 4). Een kogel met massa m treft de plaat in punt B met een snelheid v_0 en blijft daar steken.



Figuur 4.

a. Leidt het traagheidsmoment I_C af van de plaat ten opzichte van een horizontale as door het zwaartepunt van de plaat.

b. Gegeven is dat $M = 3m$. Bereken de hoeksnelheid ω (uitgedrukt in v_0 en a) van de plaat met kogel, direct nadat de kogel is ingeslagen.

c. Bereken het verlies aan kinetische energie, direct na de inslag van de kogel.

d. Bereken de minimale waarde die v_0 moet hebben, opdat de plaat met kogel naar de andere kant van A kantelt.

UITWERKING tentamen AN-1A augustus 1993

1a. Er moet gelden: $\frac{\partial F_y}{\partial x} = \frac{\partial F_x}{\partial y}$. Daaruit volgt: $3Axy^2 = 2Bxy^2$, zodat: $3A = 2B$.

b. $U(x,y) = -\frac{1}{2}Ax^2y^3 + 1$

c.

$+ B] r^4\cos^2(\theta)\sin^3(\theta)\hat{r} - [A\sin^2(\theta) - B\cos^2(\theta)] r^4\sin^2(\theta)$ c

d. $A = -B$

3a. De vliegtijd is $2.\frac{v.\sin(\alpha)}{g}$, zodat de de horizontaal afgelegde weg is $L = \frac{2v^2}{g}\sin(\alpha)\cos(\alpha)$.

b. Om de cirkelbaan te kunnen doorlopen moet de snelheid zo groot zijn dat de centripetale kracht minimaal gelijk is aan de zwaartekracht: $\frac{mv^2}{R} = mg$. Uit de energie volgt dan:

$mgH = mg2R + \frac{1}{2}mv^2 = \frac{5}{2}mgR$ zodat $H = \frac{5}{2}R$.

c. Het missende segment wordt vervangen door een stuk van een parabool. Deze moet symmetrisch zijn, zodat de hoek waaronder de kogel wegvliegt evengroot is als de hoek bij aankomst. Deze hoek is α. Voor het horizontale te overbruggen stuk geldt dan:

$$L = 2R\sin(\alpha) = \frac{2v^2}{g}\sin(\alpha)\cos(\alpha)$$

zodat volgt: $v^2 = \frac{gR}{\cos(\alpha)}$.

d. Uit de energievergelijking volgt dan:

$$H = mgR(1 + \cos(\alpha)) + \frac{1}{2}mv^2 = mgR(1 + \cos(\alpha)) + \frac{mgR}{2\cos(}$$

Hieruit volgt: $\frac{H}{R} = 1 + \cos(\alpha) + \frac{1}{2\cos(\alpha)}$. Differentiëren levert:

$$\cos^2(\alpha) = \frac{1}{2}\text{, waaruit volgt: } \alpha = \frac{\pi}{4}.$$

3a. $I_C = \frac{1}{6}Ma^2$

b. Uit behoud van impulsmoment volgt:

$$\iota = I_A\omega = \left(I_C + M\left(\tfrac{1}{2}\sqrt{2}\,a\right)^2 + m\left(\sqrt{2}a\right)^2\right)\omega = \left(\tfrac{2}{3}Ma^2 + 2ma^2\right)\omega = 4$$

zodat $\omega = \dfrac{v_0}{4a}$

c. $\frac{1}{2}mv_0^2 - \frac{1}{2}I_A\omega^2 = \frac{3}{8}mv_0^2$

d. De kinetische energie wordt omgezet in potentiële energie:

$$\frac{1}{2}I_A\omega^2 = Mg\frac{(\sqrt{2}-1)}{2}a + mg(\sqrt{2}-1)a.$$ Hieruit volgt:

$$v_0^2 = 20(\sqrt{2}-1)ga$$